Mathe-Prüfungstraining – Übungsaufgaben

2. Thema: Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

Hier kannst du testen, wie gut du die einzelnen Rechenmethoden beherrscht, die du zur Kurvendiskussion brauchst.

1. <u>Berechnung von Grenzwerten</u>
   Bestimme jeweils den Grenzwert der gegebenen Funktionsterme für $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \underset{>}{\to} 0$ und $x \underset{<}{\to} 0$.
   a) x^2 b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{x^2}$ d) $\frac{1}{|x|+5}$ e) e^x f) e^{2-x} g) $e^{\frac{1}{x}}$ h) $\ln|x|$ i) $\ln\frac{1}{x^2}$ k) $\sin\frac{1}{x}$ l) $\frac{1}{\cos x}$

2. <u>Verhalten von Funktionen im Unendlichen (grundsätzlicher Verlauf)</u>
   Entscheide für die gegebenen Funktionen, ob ihr Graph links von $+\infty$, $-\infty$, 0 oder einer anderen konstanten Zahl kommt, und ob er rechts gegen $+\infty$, $-\infty$, 0 oder eine andere konstante Zahl geht.
   a) $\frac{2}{3}x - 4$ b) $-3x^2 - 5x$ c) $(x - 0{,}5)^2$ d) $x \cdot (x+1) \cdot (2x-3)$ e) $-2x^3 + 0{,}5x^2 + 4x - 1$
   f) $(x^2+7)(7-x)$ g) $\frac{1}{x} + 3$ h) $\frac{5}{x^2}$ i) $x^{99} + \frac{99}{x}$ k) $\frac{-2}{x+2}$ l) $\frac{6-x}{x^2}$ m) $\frac{3x^3-2x^2}{-0{,}5x}$ n) $\frac{-2x+8x^6-100x^3}{x+5x^2-0{,}01x^6}$

3. <u>Polynomdivision</u>
   Führe jeweils eine Polynomdivision durch und entscheide, ob sie ohne Rest aufgeht.
   a) $(x^2 - 121):(x+11)$ b) $(2x^2 + 12x + 18):(x+3)$ c) $(9x^5 - 6x^3 + x - 3):(3x^2 - 1)$
   d) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x):(4x^3 - 3x^2 + 2x)$ e) $(x^6 - 1):(x-1)$ f) $(3x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 88):(x-2)$

4. <u>Erkennen und Berechnung von Asymptoten</u>
   Gib jeweils die Gleichungen für die senkrechten, waagrechten und schrägen Asymptoten an.
   a) $f(x) = 17 - \frac{1}{x}$ b) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x^2-2}$ c) $f(x) = \frac{16}{x^2-4}$ d) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2-4}$ e) $f(x) = \frac{16x^3}{x^2+4}$

5. <u>Faktorisieren (Ausklammern, binomische Formeln, Satz von Vieta, Mitternachtsformel)</u>
   Faktorisiere soweit wie möglich (und kürze gegebenenfalls).
   a) $x^2y^3 + 3x^2y^2 - 6x^3y^2 - (3xy)^3$ b) $x^7 + 50x^6 + 25x^5$ c) $8x^5 - 18x$ d) $\frac{x^3-8x^2+16x}{x^2-4x}$ e) $\frac{3x^2-6x}{5x-10}$
   f) $x^2 - 10x + 21$ g) $\frac{5x^3+125x+50x^2}{x^2-25}$ h) $\frac{3x^3-18x^2+27x}{3x^3-6x^2-9}$ i) $\frac{-2x+4}{x^3-2x^2-2x+4}$ k) $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-2x^2-2x+4}$ l) $\frac{x^5-1}{5x-5}$

6. <u>Nullstellensuche (auch nötig für Polstellen)</u>
   Gib die Nullstellen der folgenden Funktionen an. Ggf. musst du die erste Nullstelle geschickt „raten“.
   Achte auf die Definitionsmenge der ursprünglichen Funktion!
   a) $f(x) = 3{,}5x - 14$ b) $f(x) = 3{,}5x^2 - 14x$ c) $f(x) = 2x^2 - 32$ d) $f(x) = 16x^2 + 1$ e) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
   f) $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x-1}$ g) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ h) $f(x) = 5x^5 - 80x^3$ i) $f(x) = \frac{20x^3-10x^2-10x}{5x^4+5}$

7. <u>Symmetrie von Funktionen</u>
   Untersuche, ob die folgenden Funktionen achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung sind oder keine Symmetrie aufweisen.
   a) $f(x) = 3x^2 - 7$ b) $f(x) = 3x^2 - 7x$ c) $f(x) = 3x^3 - 7x$ d) $f(x) = \frac{3x^2-7}{7x^2+3}$ e) $f(x) = \frac{3x^2-7}{7x^3+3x}$
   f) $f(x) = \frac{3x^2-7x}{7x^3+3}$ g) $f(x) = (x^2+5)(2x-2)(x+1)$ h) $f(x) = \sin^2 x$ i) $f(x) = \frac{\cos x}{5x^2}$ k) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

8. <u>Hoch- und Tiefpunkte (zur Ableitung gibt’s später eine eigene Übungsstunde)</u>
   Finde die Stellen mit waagrechter Tangente und entscheide, ob es sich um einen HOP, TIP oder TEP handelt.
   a) $f(x) = 3x - x^2$ b) $f(x) = 3x + x^2$ c) $f(x) = 5x^5 - 3x^3$ d) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x$ e) $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

9. <u>Monotonieverhalten (-tabelle)</u>
   Unterteile die Funktion in Abschnitte, auf denen sie streng monoton steigt / fällt.
   a) $f(x) = 2(x-3)^2$ b) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2$ c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$ d) $f(x) = \frac{2x^2+8}{x}$

Mathe-Prüfungstraining – Lösungen

2. Thema: Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

1) <u>Berechnung von Grenzwerten</u>

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} x^2 = 0^2 = 0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} x^2 = 0^2 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = -0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \frac{1}{x} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|+5} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|+5} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \frac{1}{|x|+5} = \frac{1}{5}$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \frac{1}{|x|+5} = \frac{1}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} e^x = e^0 = 1$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} e^x = e^0 = 1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2-x} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} e^{2-x} = e^2$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} e^{2-x} = e^2$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} e^x = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} e^x = 1$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln|x| = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x| = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \ln|x| = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \ln|x| = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x^2} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{1}{x^2} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \ln\frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \ln\frac{1}{x^2} = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \sin\frac{1}{x} = \lightning$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \sin\frac{1}{x} = \lightning$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\cos x} = \lightning$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\cos x} = \lightning$ $\quad \lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$

2) <u>Verhalten von Funktionen im Unendlichen (grundsätzlicher Verlauf)</u>

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x - 4 = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x - 4 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 - 5x = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 - 5x = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-0{,}5)^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (x-0{,}5)^2 = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot(x+1)\cdot(2x-3) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(x+1)\cdot(2x-3) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 + 0{,}5x^2 + 4x - 1 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 + 0{,}5x^2 + 4x - 1 = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+7)(7-x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+7)(7-x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = +0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{99} + \frac{99}{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^{99} + \frac{99}{x} = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{x+2} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x+2} = -0$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6-x}{x^2} = +0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6-x}{x^2} = -0$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3-2x^2}{-0{,}5x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3-2x^2}{-0{,}5x} = -\infty$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+8x^6-100x^3}{x+5x^2-0{,}01x^6} = -800$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x+8x^6-100x^3}{x+5x^2-0{,}01x^6} = -800$

3) <u>Polynomdivision</u> (Aufgaben a) und b) lassen sich ohne PD lösen, wenn man die binomische Formel erkennt)

a) $(x^2-121):(x+11) = [(x+11)(x-11)]:(x-11) = x+11$

b) $(2x^2+12x+18):(x+3) = [2(x^2+6x+9)]:(x+3) = [2(x+3)^2]:(x+3) = 2(x+3) = 2x+6$

c) $(9x^5-6x^3+x-3):(3x^2-1) = 3x^3 - x - \frac{3}{3x^2-1}$

d) $(4x^4-3x^3+2x^2-x):(4x^3-3x^2+2x) = x - \frac{x}{4x^3-3x^2+2x} = x - \frac{1}{4x^2-3x+2}$

e) $(x^6-1):(x-1) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

f) $(3x^5-3x^3+4x^2-88):(x-2) = 3x^4+6x^3+9x^2+22x+44$

4) <u>Erkennen und Berechnung von Asymptoten</u>

a) $f(x) = 17 - \frac{1}{x}$ ⇨ senkr.: $x = 0$ / waagr.: $y = 17$

b) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x^2-2}$ ⇨ senkr.: $x = -\sqrt{2}$, $x = +\sqrt{2}$ / schräg: $y = 2x - 4$

c) $f(x) = \frac{16}{x^2-4}$ ⇨ senkr.: $x = -2$, $x = +2$ / waagr.: $y = 0$

d) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2-4}$ ⇨ senkr.: $x = -2$, $x = +2$ / waagr.: $y = 16$

e) $f(x) = \frac{16x^3}{x^2+4}$ ⇨ keine senkr. As. (Nenner ≥ 4) / schräg: $y = 16x$

5) <u>Faktorisieren (Ausklammern, binomische Formeln, Satz von Vieta, Mitternachtsformel)</u>

a) $x^2y^3 + 3x^2y^2 - 6x^3y^2 - (3xy)^3 = x^2y^2(y + 3 - 6x - 27xy)$

b) $x^7 + 50x^6 + 25x^5 = x^5(x^2 + 50x + 25) = x^5(x+5)^2$

c) $8x^5 - 18x = 2x(4x^4 - 9) = 2x((2x)^2 - 3^2) = 2x(2x+3)(2x-3)$

d) $\frac{x^3-8x^2+16x}{x^2-4x} = \frac{x(x^2-8x+16)}{x(x-4)} = \frac{x(x-4)^2}{x(x-4)} = \frac{x-4}{1} = x - 4$

e) $\frac{3x^2-6x}{5x-10} = \frac{3x(x-2)}{5(x-2)} = \frac{3x}{5} = \frac{3}{5}x$

f) $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$ (entweder erkennt man, dass 21 = (±3)·(±7) und –10 = (–3) + (–7), oder man löst die Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$ mit der Mitternachtsformel und erhält die beiden NS $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$, woraufhin sich das Polynom als $(x - x_1)(x - x_2)$ faktorisieren lässt)

g) $\frac{5x^3+125x+50x^2}{x^2-25} = \frac{5x(x^2+25+10x)}{x^2-5^2} = \frac{5x(x^2+10x+25)}{(x+5)(x-5)} = \frac{5x(x+5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{5x(x+5)}{x-5}$

h) $\frac{3x^3-18x^2+27x}{3x^3-6x^2-9} = \frac{3x(x^2-6x+9)}{3(x^3-2x-3)} = \frac{3x(x-3)^2}{3(x-3)(x+1)} = \frac{x(x-3)}{x+1}$ (Nenner: Entweder erkennt man, dass –3 = (±1)·(∓3) (beachte das unterschiedliche Vorzeichen!) und –2 = –3 + 1, oder NS 3 und –1 mit Mitternachtsformel, siehe f))

i) $\frac{-2x+4}{x^3-2x^2-2x+4} = \frac{-2(x-2)}{x^3-2x^2-2x+4}$ Im Nenner muss man nun NS raten. Wir probieren 2 aus, da sich dann $(x-2)$ kürzen lassen würde, und siehe da, es ist eine NS: 8 – 8 – 4 + 4 = 0. Nun kommt die Polynomdivision $(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) : (x - 2) = x^2 - 2$ ⇨ der Nenner lautet faktorisiert $(x-2)(x^2-2)$. Weiter gerechnet:
$\frac{-2x+4}{x^3-2x^2-2x+4} = \frac{-2(x-2)}{x^3-2x^2-2x+4} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x^2-2)} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} = \frac{-2}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$

k) $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-2x^2-2x+4}$ Hier müssen wir in Zähler und Nenner NS raten. Den Nenner hatten wir in i) schon. Im Zähler kommen als ganzzahlige NS die Teiler von 2 in Frage: ±1 und ±2. 1 ist schon mal eine NS, –1 und 2 auch, somit haben wir die Faktorisierung schon vollständig – Probe: $(x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-2x^2-2x+4} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$ Natürlich könnte man nach dem Erraten der ersten NS eine Polynomdivision durchführen, um das zweite Teilerpolynom des Zählers zu erhalten, und dieses dann mittels Mitternachtsformel oder durch „Sehen" der ganzzahligen NS (Satz von Vieta, siehe f) und h)) faktorisieren.

l) $\frac{x^5-1}{5x-5} = \frac{x^5-1}{5(x-1)}$ Wir probieren aus und merken, dass 1 auch eine NS des Zählers ist. Durch Polynomdivision erhalten wir: $(x^5 - 1) : (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Ob dieser Polynomfaktor weitere NS hat, sehen wir nicht auf den ersten Blick. ±1 sind jedenfalls keine NS, und ein Polynom 4.Grades kann unter Umständen auch gar keine NS haben. (Dies ist hier auch der Fall: $x^4 + x^2 + 1$ ist immer größer als $|x^3 + x|$ – aber das ist schwer ersichtlich). Da der Nenner sich ohnehin bereits kürzen lässt, lohnt es sich nicht, hier noch länger herumzuprobieren. $\frac{x^5-1}{5x-5} = \frac{x^5-1}{5(x-1)} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{5(x-1)} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{5} = \frac{1}{5}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

6) <u>Nullstellensuche (auch nötig für Polstellen)</u>

Gib die Nullstellen der folgenden Funktionen an. Ggf. musst du die erste Nullstelle geschickt „raten".
Achte auf die Definitionsmenge der ursprünglichen Funktion!

a) $f(x) = 3{,}5x - 14 = 0 \Leftrightarrow 3{,}5x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3{,}5} = \frac{28}{7} = 4$

b) $f(x) = 3{,}5x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow 3{,}5x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

c) $f(x) = 2x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 4$

d) $f(x) = 16x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow$ ↯ keine Lösung, $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist (und der Nenner nicht!))

f) $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x-1} \;\Leftrightarrow\; 2x^2-4x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x-1=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$
Man könnte die quadratische Gleichung natürlich auch mit der Mitternachtsformel lösen.
ACHTUNG: Obwohl oben $x=1$ herauskommt, ist dies KEINE Lösung der Gleichung! Wir müssen uns nämlich noch vergewissern, dass der Nenner für $x=1$ nicht Null wird. Das tut er aber. Die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert. Alternativ hätten wir durch Faktorisieren erkannt: $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x-1} = \frac{2(x-1)^2}{x-1} = 2(x-1)$
Die *gekürzte* Version der Funktion hat nun wirklich eine NS bei $x=1$. Aber dies ist nicht mehr die ursprüngliche Funktion, sondern eine ergänzte Fassung, bei der die Definitionslücke behoben wurde.
Die Antwort lautet also: Die Funktion $f(x)$ hat *keine* NS. An der Stelle $x=1$, wo sie die *x*-Achse schneiden würde, hat sie stattdessen eine Definitionslücke (die man beheben könnte).

g) $f(x) = x^3-6x^2+11x-6=0$ Wir müssen die erste NS raten. Als ganzzahlige NS kommen die Teiler von 6, also ±1, ±2, ±3 und ±6 in Frage. Mit der 1 haben wir gleich Glück, also machen wir uns an die Polynomdivision: $(x^3-6x^2+11x-6):(x-1) = x^2-5x+6$. Der zweite Polynomfaktor kann entweder durch die MNF oder durch geschicktes Erkennen von $6 = (\pm 2)\cdot(\pm 3)$ und $-5 = (-2)+(-3)$ faktorisiert werden. Somit folgt:
$x^3-6x^2+11x-6=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)(x-3)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$

h) $f(x) = 5x^5-80x^3=0 \;\Leftrightarrow\; 5x^3(x^2-16)=0 \;\Leftrightarrow\; 5x^3(x+4)(x-4)=0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2,3}=0,\ x_{3,4}=\pm 4$
Es ist hilfreich wenn man sich gleich bewusst macht, dass 0 eine dreifache NS und ±4 jeweils einfache NS sind.

i) $f(x) = \frac{20x^3-10x^2-10x}{5x^4+5} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{10x(2x^2-x-1)}{5(x^4+1)} = 0$ Der Nenner hat keine NS, somit ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und alle NS des Zählers sind NS von *f*. Die erste NS lautet $x_1=0$. Die NS des letzten Faktors im Zähler suchen wir mit Hilfe der MNF: $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

7) Symmetrie von Funktionen (ASy = Achsensymmetrie, PuSy = Punktsymmetrie, NiSy = nicht symmetrisch)

a) $f(x) = 3x^2-7$ Nur geradzahlige Potenzen von *x* ⇨ ASy
b) $f(x) = 3x^2-7x$ Ungerade und gerade Potenzen von *x* ⇨ NiSy
c) $f(x) = 3x^3-7x$ Nur ungerade Potenzen von *x* ⇨ PuSy
d) $f(x) = \frac{3x^2-7}{7x^2+3}$ Zähler ASy, Nenner ASy ⇨ beide gleiche Sy ⇨ ASy
e) $f(x) = \frac{3x^2-7}{7x^3+3x}$ Zähler ASy, Nenner PuSy ⇨ unterschiedliche Sy ⇨ PuSy
f) $f(x) = \frac{3x^2-7x}{7x^3+3}$ Zähler NiSy, Nenner NiSy ⇨ NiSy (sobald entweder Zähler oder Nenner NiSy sind)
g) $f(x) = (x^2+5)(2x-2)(x+1) = 2(x^2+5)(x-1)(x+1) = 2(x^2+5)(x^2-1) = 2(x^4+4x^2-5)$
Wir erkennen an der Lage der NS, ob die Funktion überhaupt symmetrisch sein kann. Die NS ±1 liegen symmetrisch zum Ursprung. Das heißt aber noch nicht automatisch, dass die Funktion eine Symmetrie hat. Entweder multiplizieren wir den Funktionsterm aus, so wie im letzten Schritt, oder wir betrachten die einzelnen Faktoren: (x^2+5) ist ASy, (x^2-1) ist ASy, dann ist es das Produkt auch. Der konstante Faktor 2 streckt die Funktion lediglich und ändert die Symmetrie nicht. Achtung: Den Linearfaktoren $(x\pm 1)$ sehen wir NICHT direkt an, ob die gesamte Funktion eine Symmetrie hat.
h) $f(x) = \sin^2 x$ Die Sinusfunktion ist zwar punktsymmetrisch, allerdings sorgt das Quadrieren dafür, dass für positive und negative *x* jeweils der gleiche Funktionswert herauskommt. Hier greift man am besten auf die Definition von ASy/PuSy zurück und berechnet $f(-x)$, um das Ergebnis mit $f(x)$ und $-f(x)$ zu vergleichen:
$f(-x) = \sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin(x))^2 = (\sin(x))^2 = \sin^2 x = f(x)$ ⇨ ASy
i) $f(x) = \frac{\cos x}{5x^2}$ Zähler ASy, Nenner ASy ⇨ gleiche Sy ⇨ ASy
k) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ Zähler PuSy, Nenner ASy ⇨ unterschiedliche Sy ⇨ PuSy

8) Hoch- und Tiefpunkte

a) $f(x) = 3x-x^2$ ⇨ $f'(x) = 3-2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{3}{2}$ / $y_1 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}-\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$
Art des Extremums: Entweder 2.Ableitung: $f''(x) = -2$, $f''\left(\frac{3}{2}\right) = -2$ ⇨ rechtsgekrümmt ⇨ HOP$\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{9}{4}\right)$
oder Vorzeichenverhalten von f': $f'(x) > 0$ für $x < \frac{3}{2}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \frac{3}{2}$ ⇨ steigen/fallen: HOP

b) $f(x) = 3x+x^2$ ⇨ $f'(x) = 3+2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -\frac{3}{2}$ / $y_1 = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}+\frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$
Art des Extremums: Entweder 2.Ableitung: $f''(x) = 2$, $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 2$ ⇨ linksgekrümmt ⇨ TIP$\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{9}{4}\right)$
oder Vorzeichenverhalten von f': $f'(x) < 0$ für $x < \frac{3}{2}$ und $f'(x) > 0$ für $x > \frac{3}{2}$ ⇨ fallen/steigen: TIP

c) $f(x) = 5x^5 - 3x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 25x^4 - 9x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(5x-3)(5x+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm\frac{3}{5}$
$y_{1,2} = f(0) = 0,\ \ y_{3,4} = f\left(\pm\frac{3}{5}\right) = \pm\frac{243}{625}$
Art der Extrema: Entweder 2.Ableitung: $f''(x) = 100x^3 - 18x$, $f''(0) = 0 \;\Rightarrow$ keine Aussage möglich,
$f''\left(\pm\frac{3}{5}\right) = \pm\frac{108}{5} \mp \frac{54}{5} = \pm\frac{54}{5} \;\Rightarrow$ TIP$\left(\frac{3}{5}\middle|\frac{243}{625}\right)$, HOP$\left(-\frac{3}{5}\middle|-\frac{243}{625}\right) \;\Rightarrow$ aufgrund der Lage der Punkte: TEP$(0|0)$
oder VZV f': $f'(x) > 0$ für $x < -\frac{3}{5}$, $f'(x) \leq 0$ für $-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$ und $f'(x) > 0$ für $x > \frac{3}{2} \;\Rightarrow$ HOP/TEP/TIP

d) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^2 - 16x + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4(x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = 2$
$y_{1,2} = f(2) = \frac{32}{3} - 32 + 32 = \frac{32}{3}$
Art der Extrema: Entweder 2.Ableitung: $f''(x) = 8x - 16$, $f''(2) = 0 \;\Rightarrow$ keine Aussage möglich
oder Vorzeichenverhalten von f': $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow$ TEP$\left(2\middle|\frac{32}{3}\right)$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x-4} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2x(x-4) - x^2}{(x-4)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_2 = 8$
$y_1 = f(0) = 0,\ \ y_2 = f(8) = \frac{64}{4} = 16$
Art der Extrema: Entweder 2.Ableitung: $f''(x) = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2-8x)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{2x^2 - 16x + 32 - 2x^2 + 16x}{(x-4)^3} = \frac{32}{(x-4)^3}$,
$f''(0) = \frac{32}{-64} \;\Rightarrow$ HOP$(0|0)$, $\ f''(8) = \frac{32}{64} \;\Rightarrow$ TIP$(8|16)$ (Quotientenregel sehr aufwendig!)
oder VZV von f': $f'(x) > 0$ für $x < 0$, $f'(x) < 0$ für $0 < x < 8$ und $f'(x) > 0$ für $x > 8 \;\Rightarrow$ HOP/TIP

9) Monotonieverhalten (-tabelle)

a) $f(x) = 2(x-3)^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 3 \;\;/\;\; y_1 = f(3) = 0$

Bereich	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
Ableitung $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$
Graph von $f(x)$	fallend	TIP$(3\|0)$	steigend

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_{2,3} = \frac{1}{3}$
$y_1 = f(0) = 0,\ \ y_{2,3} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{108} - \frac{2}{81} + \frac{1}{54} = \frac{1}{324}$

Bereich	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
Ableitung $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$ (kein VZW, da doppelte NS)	$f'(x) > 0$
Graph von $f(x)$	fallend	TIP$(0\|0)$	steigend	TEP$\left(\frac{1}{3}\middle\|\frac{1}{324}\right)$	steigend

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$
$y_1 = f(0) = 4,\ \ y_{2,3} = f(\pm 2) = 16 - 32 + 4 = -12$

Bereich	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Ableitung $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$
Graph von $f(x)$	fallend	TIP$(-2\|-12)$	steigend	HOP $(0\|4)$	fallend	TIP$(2\|-12)$	steigend

d) $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x} = 2x + \frac{8}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm 2 \;\;/\;\; y_{1,2} = f(\pm 2) = \frac{16}{\pm 2} = \pm 8$
Achtung: Sowohl f als auch f' haben eine Definitionslücke (Polstelle) bei $x = 0$. Dies muss bei der Monotonietabelle berücksichtig werden.

Bereich	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Ableitung $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$	$f'(x)$ nicht def.	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$ (VZW)	$f'(x) > 0$
Graph von $f(x)$	steigend	HOP$(-2\|-8)$	fallend	Polstelle mit VZW	fallend	TIP$(2\|8)$	steigend

Weitere Übungsaufgaben im Netz

2. Thema: Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

Übungsaufgaben mit Lösungen auf http://www.raschweb.de:

- Mathe 10: Polynomdivision, Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen,
  Weitere Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen, Aufgaben zu rationalen Funktionen
- Mathe 11: Polstellen und hebbaren Definitionslücken, Asymptoten, 6 Aufgaben zu Asymptoten,
  Aufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen, 3 weitere Aufgaben zu gebr. rationalen Funktionen

Wachhalten/Diagnostizieren-Aufgaben mit Lösungen
auf http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb1/modul4/basis/:

- Jgst. 9/10 Teil 2: Seiten 7, 8, 9, 11, 12
- Kursstufe: Seiten 11, 12

Übungsaufgaben mit schrittweiser Hilfestellung und sofortiger Korrektur auf http://www.mathegym.de:

- Ganzrationale Funktionen (10. Klasse)
- Gebrochen-rationale Funktionen (08. Klasse), Gebrochen-rationale Funktionen – Fortsetzung (11./12. Klasse)
- Graphen verschieben, spiegeln und strecken (10. Klasse)
- Limes (10. Klasse), Limes – Fortsetzung (11./12. Klasse)

Rechenregeln in Videoform erklärt, mit kleinen Zwischenfragen (Vorlesung zur Vorbereitung aufs Mathestudium, behandelt aber elementaren Schulstoff recht anschaulich und ausführlich): http://capira42.appspot.com

- 11 Gleichungen und Gleichungssysteme, Polynome: 098 Polynome, Grad, Nullstellen / 099 Polynomdivision, Abspaltung von Linearfaktoren / 101 Faktorisierung von Polynomen
- 02 Bruchrechnung: 013 Brüche auflösen, Definitionsmenge / 013a Definitionsmenge von Ausdrücken